بسمه تعالی

ساختمانهای گسسته

۱۳۹۲-۹۳ / ترم ۲

اصل شمارش

دورنما

- اصل جمع و ضرب در شمارش
- جایگشت
  - نامتمایز،دوری، یک درمیان، ترتیب
- ترکیب
- بسط دو جمله ای
- اصل شمول و طرد

تعریف

- اصل جمع: اگر دو کار، یکی به m و دیگری به n طریق قابل انجام باشند و نتوانند به صورت همزمان انجام گیرند، انجام یکی از دو کار به n+m طریق دارد.
- مثال
- اصل ضرب: اگر یک روند به n مرحله تقسیم شده باشد و هر مرحله دارای ni طریق باشد، کل روند به n1*n2*...Nn طریق قابل انجام است.
- مثال

جایگشت یا تبدیل (permutation)

- جایگشت از n شی متمایز، ایجاد گروههایی از تمام آن n شی است که تفاوت گروهها فقط در ترتیب قرار گرفتن اشیا در کنار هم است.
- مثال: تعداد طرق به صف کردن ۵ دانش اموز

حالات خاص

- نکته: تعداد جایگشت n شی متمایز که r تای آنها در کنار هم باشند، برابر است با: $(n-r+1)!\ r!$

- نکته: جایگشت در اعضای نا متمایز: اگر n شی داشته باشیم که n1 تای آنها از نوع اول ... Nk تای انها از نوع kام باشند، تعداد جایگشتها برابر است با : $n!/\ (n1!..nk!)$

جایگشت دایره ای و یک در میان

- جایگشت چرخشی (دایره ای): به تبدیلی که در ان یک دسته از اشیا را روی محیط دایره مرتب میکنیم، تبدیل دوری گویند و تعداد جایگشتها برابر است با: !(n-1)
- مثال: تعداد طرق نشستن n نفر دور میز

- جایگشت یک درمیان: طرق قرار دادن n شی از نوع ۱و m شی از نوع ۲ برابر است با:
  - 2*m! N! : m=n
  - m! n! : M=n+1

ادامه

- جایگشت یک درمیان n شی از نوع ۱و n شی از نوع b دور یک میز برابر است با : $n!\,(n-1)!$

- تعداد طرق جایگشت یک درمیان ۱۰ مهره سفید و ۱۰ آبی در یک تسبیح

ترتیب

- تعریف: تعداد جایگشت r شی متمایز از n شی متمایز برابر است با $P(n,r) = n!/(n-r)!$. به این نوع خاص از جایگشت، ترتیب گوییم. در ترتیب علاوه بر ترتیب قرار گیری اشیا، انتخاب اشیا نیز مهم است.

- نکته: اگر r شی الزاما متمایز نباشند (تکرار مجاز) تعداد جایگشتها برابر با n^r است.

- مثال: تعداد کمات ۴ حرفی ساخته شده با حروف computer

ترکیب

- تعریف: اگر در انتخاب r شی متمایز از بین n شی ، ترتیب قرار گیری اشیا مهم نباشد، این انتخاب را ترکیب گوییم.
- $C(n,r) = n!/ (r! (n-r)!)$

- تشکیل یک کمیته ۳ نفره از میان ۸ نفر
- تشکیل کمیته ۳ نفره شامل مدیر، معاون و حسابدار از میان ۸ نفر

ترکیبات با تکرار

- تعداد طرق تقسیم n شی مشابه بین k نفر
- $C(n+k-1,k-1) = C(n+k-1,n)$
- مثال: تعداد طرق سرو ۴ نوع غذا برای ۷ مشتری
- تعداد طرق تقسیم ۶ مداد سیاه بین ۴ نفر

- قضیه: تعداد طرق تقسیم n شی متمایز بین k نفر:
- $P(n+k-1,n) = (n+k-1)! / (k-1)!$
- مثال: طرق تقسیم ۶ مداد با رنگهای متمایز بین ۴ نفر

بسط چند جمله ای

- بسط دو جمله ای نیوتن در مورد $(a+b)^n$
- مثال : ضریب x^5y^2 در بسط $(2x+y)$

- نکته: تعداد جملات در بسط $(a+b)^n$ برابر با $n+1$ جمله است که جمله $p+1$ ام: $C(n,p)a^{n-p}b^p$ است.

- نکته: برای پیدا کردن مجموع ضرایب $(f(x)+g(x))^n$ کافی است به جای x ، ۱ قرار دهیم.

تعمیم بسط دو جمله ای

- در $(x_1+...+x_k)^n$ هر جمله به صورت $Ax_1^{n1}..x_k^{nk}$ است.
  که $A= n!/ (n_1! ... n_k!)$

- تعداد جملات این بسط: $C(n+k-1,n)$ است . (تعداد طرق تقسیم n شی مشابه بین k نفر

اصل شمول و طرد

- در یک مجموعه مرجع M با m عضو ، دو مجموعه A,B با $|A|,|B|$ عضو داریم:
- $|A \cup B| = |A|+|B|-|A \cap B|$
- **تعمیم:**
- $|A \cup B \cup C| = |A|+|B|+|C|-|A \cap B|-|B \cap C|-|A \cap C| + |A \cap B \cap C|$

- **مثال: چند عدد کمتر یا مساوی ۱۰۰۰ داریم که نه مضرب ۳ و نه مضرب ۵ باشند.**