# بسمه تعالی

## ساختمان‌های گسسته

۹۹-۱۳۹۸ / ترم ۱

فصل ۴: مجموعه‌های مرتب

# دورنما

- مجموعه‌ها با ترتیب جزئی
- مشبکه‌ها
- جبر بول

# ترتیب جزئی

- تعریف: رابطه $R$ در $A$ را ترتیب جزئی گوییم هرگاه بازتابی، ضدمتقارن و متعدی باشد. $A$ و $R$ را مجموعه با ترتیب جزئی گفته و با $(A, R)$ نمایش می‌دهیم.
- مثال:
  - $S$ یک مجموعه و $A = P(S)$ . $(A, \subseteq)$ مجموعه‌ای با ترتیب جزئی
  - $(Z, |)$, $(Z, \geqslant)$, $(Z, \leqslant)$
  - $(Z, <)$ ترتیب جزئی نیست (چرا؟)
  - معروفیت ترتیب‌های جزئی $\leqslant$ و $\geqslant$ منجر به نمایش عمومی ترتیب، با این علایم شد.

# ترتیب کامل

- اگر $(A, \leqslant)$، عناصر a و b را **قابل مقایسه** گوییم اگر بتوان رابطه مقایسه‌ای $\leqslant$ یا $\geqslant$ را بینشان تعریف کرد. (لزومی ندارد هر زوج از عناصر قابل مقایسه باشند. مثال: رابطه | در مورد اعداد ۳و ۸)

اگر هر زوج از A قابل‌مقایسه باشند، A را **مجموعهٔ کاملا مرتب** یا **زنجیر** گوییم و ترتیب جزئی را **ترتیب کامل** گوییم.

- مثال: مجموعه Z با رابطهٔ ترتیب جزئی $\leqslant$ یک زنجیر است.

# ترتیب حاصل‌ضرب

- قضیه: اگر $(A, \leqslant)$ و $(B, \leqslant)$ دو مجموعه با ترتیب جزئی باشند:

$(A\times B, \leqslant)$ نیزترتیب جزئیست وآن را **ترتیب جزئی حاصل‌ضرب** می‌گوییم.

- اگر $(A, \leqslant)$ یک مجموعه با ترتیب جزئی باشد، گوییم $a<b$، اگر $a \leqslant b$ ( $a$ و $b$ در رابطهٔ ترتیب جزئی قرار دارند) اما دو عنصر متمایز باشند. $(a\neq b)$
- اگر ترتیب $A\times B$ یک ترتیب حاصل‌ضرب باشد، $(a, b) \langle (a', b')$ اگر:
- $a < a'$ (یا $a=a'$ و $b \leqslant b'$ ) این ترتیب را **ترتیب قاموسی** گوییم.
- اگر $A$ و $B$ مجموعه‌های کاملا مرتب باشند، ترتیب قاموسی در $A\times B$ نیز ترتیب کامل است.

# الفبا

- اگر $\Sigma$ یک مجموعه متناهی از علائم باشد، رشته‌ای متناهی از علایم را کلمه روی $\Sigma$ و $\Sigma$ را الفبا می‌نامیم.
- طول کلمه $w$ را با $|w|$ نمایش می‌دهیم. $\Lambda$، $\Sigma^+$، $\Sigma^*$، $\Sigma^0$
- الحاق دو کلمه

# گراف ترتیب جزئی- نمودار هاس

- گراف سودار ترتیب جزئی، دارای هیچ دوری به طول بزرگ‌تر از ۱ نیست (چرا؟) و دارای دور در هر رأس است. (چرا؟)
- اگر برای سادگی، (۱) طوقه‌های این گراف را حذف، و (۲) یال‌های به‌وجود آمده از تعدی را نیز برداریم و (۳) رئوس را به جای دایره با نقطه نشان دهیم و (۴) با قرار داد کردن اینکه جهت‌ها به سمت بالاست جهت را حذف کنیم، نمودار هاس (که ساده شدهٔ گراف ترتیب جزئی است) به‌دست می آید.

# گراف ترتیب جزئی- نمودار هاس (ادامه)

- مثال
- اگر $(A, \leqslant)$ یک ترتیب جزئی و $(A, \geqslant)$ دوگان آن باشد، نمودار هاس آن وارون نمودار هاس دوگان می باشد.

# ترتیب توپولوژیکی

- فرآیند تشکیل یک ترتیب کامل مانند $<_t$ را ترتیب توپولوژیکی می‌گوییم. (اگر $a \leq b$ آنگاه باید a قبل از b بیاید.)

- مثال

# تابع یک‌ریختی

- اگر $(A,\leq)$ و $(A',\leq')$ دو مجموعه با ترتیب جزئی و تابع $f: A \rightarrow A'$ یک تناظر یک‌به‌یک بین اعضای این دو مجموعه باشد، تابع f را تابع یک‌ریختی از $(A,\leq)$ به $(A',\leq')$ می‌گوییم.
- برای هر $a,b \in A$ داریم: $f(a) \leq f(b)$ if $a \leq b$

- اگر یک تابع یک‌ریختی میان دومجموعهٔ با ترتیب جزئی وجود داشته باشد، در آن‌صورت دو مجموعه با هم یک‌ریخت هستند.

# تابع یک‌ریختی (ادامه)

- اگر عناصر $A$ نسبت به یکدیگر یا نسبت به مجموعه ثالث $B$ دارای خاصیتی باشند که بتوان آن را با $\leq$ بیان کرد، عناصر $A'$ هم دارای همان خاصیت نسبت به $\leq'$ هستند. (اصل تناظر)

# ماکزیمم/ مینیمم

- عنصر $a \in A$ را بزرگ‌ترین عضو (ماکزیمم) $A$ گوییم اگر:

$\forall x \in A : x \leq a$.

- بزرگ‌ترین عضو حداکثر یکی است. در صورت وجود با $I$ نمایش داده می‌شود و عضو واحد خوانده می‌شود.

- عنصر $a \in A$ را کوچک‌ترین عضو (مینیمم) $A$ گوییم اگر:

$\forall x \in A : a \leq x$.

کوچک‌ترین عضو حداکثر یکی است. در صورت وجود با $O$ نمایش داده میشود و عضو صفر خوانده می‌شود.

# ماکزیمال/ مینیمال

- عنصر $a \in A$ را یک عضو ماکزیمال می‌گوییم اگر برای هیچ عضو $c \in A$ رابطه $a<c$ برقرار نباشد.
- عنصر $a \in A$ را یک عضو مینیمال می‌گوییم اگر برای هیچ عضو $c \in A$ رابطه $c<a$ برقرار نباشد.

# کران بالا / کران پایین

- اگر $A$ یک مجموعه با ترتیب جزئی و $B$ زیرمجموعه آن باشد، عنصر $a \in A$ را:
- کرانه بالایی $B$ گوییم اگر: $\forall b \in B : b \leq a$
- کرانه پایینی $B$ گوییم اگر: $\forall b \in B : a \leq b$

# کوچکترین کران بالا / بزرگترین کران پایین

- کوچکترین کران بالایی (LUB) برای b گوییم اگر اولا a یک کرانه بالایی برای b باشد و ثانیا اگر a' نیز کران بالایی برای b باشد. $a \leq a'$
- بزرگترین کران پایینی(GLB) برای b گوییم اگر اولا a یک کرانه پایینی برای b باشدو ثانیا اگر a' نیز کران پایینی برای b باشد. $a' \leq a$

- ماکزیمم / مینیمم، ماکزیمال/ مینیمال، کران بالا / پایین، کوچک‌ترین کران بالا و بزرگ‌ترین کران پایین یک مجموعه، متناظرا معادل‌های خود را در مجموعهٔ یک‌ریخت آن با استفاده از $f(a)$ دارند.

# مشبکه

- مشبکه مجموعه‌ای با ترتیب جزئی مثل $(L,\leq)$ است که: در آن هر زیر مجموعه شامل دو عنصرمثل $\{a,b\}$ دارای یک LUB و یک GLB باشد.

$$LUB(\{a,b\}) = a \vee b \ , \ GLB(\{a,b\}) = a \wedge b$$

- اگر L۱ و L۲ دو مشبکه باشند، حاصل‌ضرب آن‌ها نیز یک مشبکه است.

# زیرمشبکه

- زیرمشبکه: اگر $(L,\leq)$ یک مشبکه باشد، زیرمجموعه ناتهی $S$ از $L$ را زیرمشبکه $L$ گوییم اگر به ازای هر $(a,b\in S)$، $a\wedge b$ و $a\vee b$ (که توسط $L$ تعیین شده‌اند) در $S$ نیز وجود داشته باشند.
- مشبکه بودن، وست و رسند نیز معادلی در یک‌ریخت یک مجموعه ترتیب جزئی دارند.

# خواص مشکبه‌ها

۱. $a \le a \vee b$ و $b \le a \vee b$ ($a \vee b$ یک کرانه بالایی برای $a$ و $b$ است)

۲. اگر $a \le c$ و $b \le c$ آن‌گاه $a \vee b \le c$ ($a \vee b$ کوچک‌ترین کرانه بالایی برای $a$ و $b$ است)

۳. $a \wedge b \le a$ و $a \wedge b \le b$ ($a \wedge b$ یک کرانه پایینی برای $a$ و $b$ است)

۴. اگر $c \le a$ و $c \le b$ آن‌گاه $c \le a \wedge b$ ($a \wedge b$ بزرگ‌ترین کرانه بالایی برای $a$ و $b$ است)

# خواص مشکبه‌ها (ادامه)

اگر $L$ یک مشبکه باشد آن‌گاه به ازای هر $a$ و $b$ از $L$ داریم:

۱. $a \vee b = b$ اگر و تنها اگر $a \leq b$

۲. $a \wedge b = a$ اگر و تنها اگر $a \leq b$

۳. $a \wedge b = a$ اگر و تنها اگر $a \vee b = b$

- ..
- مشبکه محدود: دارای بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عضو
- هر مشبکه متناهی حتما محدود است.
- بخش‌پذیر

# جبر بول

- اگر S یک مجموعه و $L = P(S)$، آن‌گاه $(L,\subseteq)$ یک مشبکه با ویژگی‌های متنوعی است که کاربردهای بسیار دارد.
- اگر دو مجموعه S ۱ و S ۲ با تعداد عناصر یکسان داشته باشیم، مشبکه‌های ساخته شده از آن‌ها با هم یک‌ریختند.

- جبر بول: مشبکه‌های متناهی یک‌ریخت با Bn.
- Bn برابر n بار ضرب B در خودش است.

- تابع بول
- چندجمله‌ای بولی
- لیترال
- کمینه
- Dnf

# نقشه کارنو