



# بسمه تعالی

ساختمان‌های گسسته

۹۹-۱۳۹۸ / ترم ۱

فصل ۳: توابع



## تعریف

- اگر  $A$  و  $B$  دو مجموعه غیر تهی باشند، تابع  $f$  از  $A$  به  $B$ : رابطه‌ای است از  $A$  به  $B$  که: به ازای هر عضو  $a$  از دامنه  $f$ ،  $f(a)$  فقط شامل یک عضو از  $B$  باشد.

$$\left. \begin{array}{l} (a, b_1) \in f \\ (a, b_2) \in f \end{array} \right\} b_1 = b_2$$

- دامنه: عناصری از  $A$  که در رابطه شرکت داشتند. (Dom)
- برد: مجموعه نسبیه دامنه. (Ran)



## تابع همانی

$$A=B, f(a) = a \bullet$$

• همانند چه مفهومی در روابط؟



## ترکیب روابط

- $\text{fog}(x) = f(g(x))$

- مثال:  $f=x^2$  و  $g=x+1$  .  $\text{fog}$  و  $\text{gof}$  را بدست آورید.



## توابع خاص

تابع  $f$  از  $A$  به  $B$  را:

- همه جا تعریف شده گوئیم اگر:  $\text{Dom}(f) = A$
- پوشا:  $\text{Ran}(f) = B$
- یک به یک:  $f(a) = f(b) \rightarrow a=b$
- وارون پذیر: هرگاه معکوس آن ( $f^{-1}$ ) نیز تابع باشد.



## توابع خاص (ادامه)

• نکته:

1.  $f^{-1}$  تابع است اگر و تنها اگر  $f$  یک به یک باشد.  $\leftarrow f^{-1}$  نیز یک به یک است.
2. اگر  $f$  همه جا تعریف شده باشد  $\leftarrow f^{-1}$  پوشاست و بلعکس.



## قضیه

- اگر  $A$  و  $B$  دو مجموعه با تعداد عناصر یکسان باشند و  $f: A \rightarrow B$  همه جا تعریف شده باشد:
- $F$  یک به یک است  $\leftarrow f$  پوشاست و بلعکس.



## قضیه

• فرض کنید  $f: A \rightarrow B$  تابعی با دامنه و برد متناهی باشد که:

$$|\text{Dom}| = n, |\text{Ran}| = m$$

$$f \text{ یک به یک است} \iff m=n$$

$$f \text{ یک به یک نیست} \iff m < n$$

اگر دامنه را کبوترها و برد را لانه‌ها در نظر بگیریم، و تابع  $f$  هر کبوتر را به یک لانه نسبت دهد:

**اصل لانه کبوتر:** اگر  $n$  کبوتر را به  $m$  لانه منسوب کنیم و  $m < n$  باشد، آنگاه دست کم یک لانه متعلق به دو یا بیشتر از دو کبوتر است.





## مثال

• ۱۳ نفر به یک مهمانی دعوت شدند. حداقل دو نفر ماه تولد یکسان دارند.



## تعمیم اصل لانه کبوتر

اگر  $m$  لانه و بیشتر از  $2m$  کبوتر داشته باشیم:

- اگر  $n$  کبوتر را به  $m$  لانه منسوب کنیم، دست کم یکی از لانه‌ها شامل  $\lceil n/m \rceil$  کبوتر است.  $(\lceil \frac{n-1}{m} \rceil + 1)$

- مثال: از یک کلاس ۲۵ نفره، دست کم ۳ نفر ماه تولد یکسان و ۴ نفر روز تولد یکسان دارند.



## معکوس لانه کبوتری

- $m$  لانه وجود دارد. برای اینکه دست کم یکی از لانه‌ها  $k$  کبوتر داشته باشد، نیاز است تعداد کبوترها حداقل  $m(k-1)+1$  باشد.
- مثال: تعدادی کفش با مدل یکسان و با سایزهای ۳۷-۴۴ داریم. لازم است چند کفش لنگه را بطور تصادفی برداریم تا حداقل یکی از کفش‌ها جفت شود.