بسمه تعالی

ساختمان‌های گسسته

۹۹-۱۳۹۸ / ترم ۱

فصل ۶: گراف

دورنما

- تعاریف اولیه
- گراف چندگانه و وزندار
- انواع مسیر
- مسیر و مدار اویلری
- مسیر و دور هامیلتونی
- کوتاهترین مسیر
- گراف هامنی

تعاریف پایه

نمایش گرافیکی بین اعضای یک مجموعه

هر گراف G شامل دو مجموعه به نام های V و E می‌باشد.

V : مجموعه‌ای متناهی و غیرتهی از رئوس می‌باشد.

E : مجموعه‌ای از زوج راس‌ها که به آن یال گفته می‌شود.

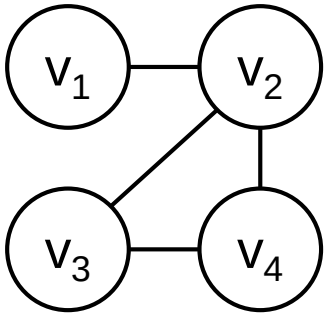
- گراف بدون جهت:

گرافی است که در آن زوج رئوسی که یک یال را نشان می دهند ترتیبشان بی‌اهمیت است مثلا اگر v و u دو راس طرفین یک یال باشند آن‌گاه (u,v) و (v,u) هر دو یک یال را نشان می‌دهند.

- مثال زیر نمایشی از یک گراف بدون جهت است .

V(G) ={v1,v2,v3,v4}

E(G) ={{v1,v2},{v2,v4},{v2,v3},{v4,v2}}

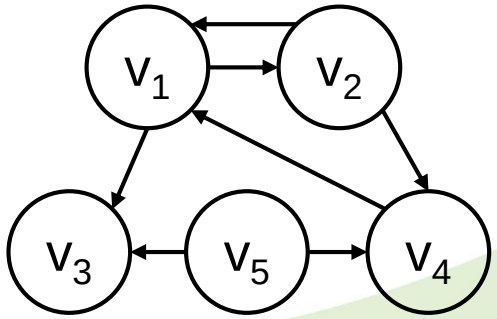


گراف جهت‌دار: در گراف جهت‌دار هر یال با یک زوج مرتب نشان داده می‌شود به عنوان مثال یال <u,v> در یک گراف جهت‌دار یالی است که از u آغاز شده و به v ختم می‌شود .

مثال زیر نمونه‌ای از یک گراف جهت‌دار است :

V(G2)={V1,V2,V3,V4,V5}

E(G2)={<V1,V2>,<V2,V1>,<V1,V3>,<V۵,V۳>,<V5,V4>,
<V۴,V1>,<V2,V4>}

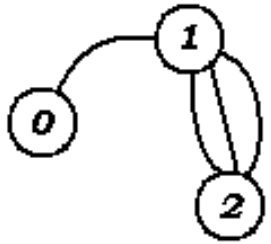


۱) یال (v_1,v_2) حادث از v_1 و حادث به v_2 است. v_1 و v_2 راس ابتدایی و انتهایی یال هستند.

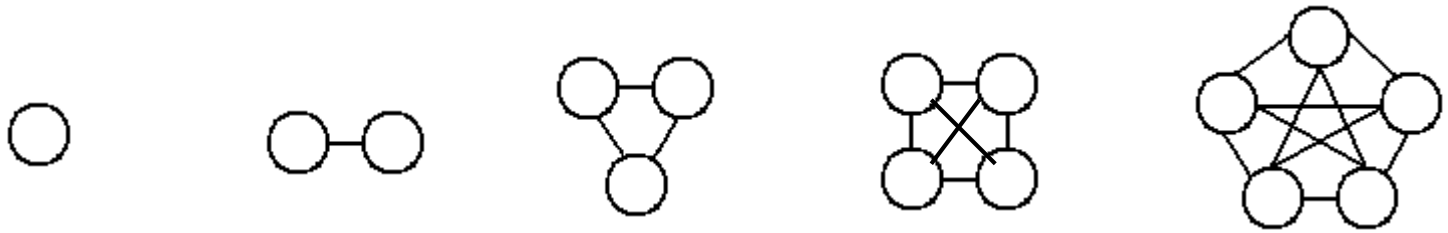
۲) راس منفرد: هیچ یالی با آن حادث نباشد. (یک یال حادث با رئوسی است که به‌وسیله آن به هم وصل می‌شوند.)

۳) یال‌های از یک راس به خودش را Self edge یا خودیالی یا طوقه می‌گوییم.

- اگر یک گراف بدون جهت شامل n راس داشته باشیم حداکثر تعداد یال‌های آن برابر با n(n-1) / 2 می‌باشد.

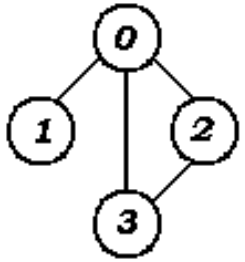


n	e
1	0



- اگر تعداد یال‌های گراف بدون جهت $n(n-1)/2$ باشد با وجود n راس گراف کامل نامیده می‌شود.
- اگر در یک گراف مانند G یالی به صورت (u,v) وجود داشته باشد آن‌گاه رئوس u,v را مجاور گویند و یال (u,v) را یک یال متلاقی روی u,v می‌نامند.
- در واقع می‌توان گفت یال‌های متلاقی روی راس v یال‌هایی هستند که یک طرف آن‌ها راس v می‌باشد.

- در این گراف راس0 و 1 مجاورند و همچنین رئوس (0,2), (3,2), (0,3) هریک دو به دو مجاور هم هستند اما راس 1 و 2 مجاور هم نمی‌باشند. در این گراف یال‌های متلاقی روی راس 0 عبارت اند از : (3,0), (2,0), (1,0).

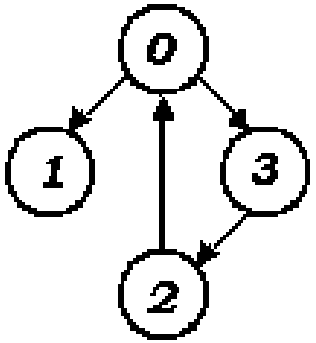


- مفاهیم فوق در یک گراف جهت‌دار نیز مطرح می شود اگر یال <u,v> یک یال جهت‌دار باشد آن‌گاه راس u را مجاور به راس v و راس v را مجاور از راس u می‌گویند، همچنین یال <u,v> روی دو راس u و v متلاقی است.

مثال: در گراف زیر راس 0 به راس 1 و 3 مجاور است.

یال‌های متلاقی روی راس 0 عبارت اند از:

<0,1>, <2,0>, <0,3>



- دسترس‌پذیر: b از a دسترس‌پذیر است اگر مسیر داشته باشیم.
- مسیر ژئودزیک: مسیربا حداقل طول بین دو رأس a و b.
- مرکزگریزی یک رأس u: بزرگ‌ترین مقدار در کوتاه‌ترین مسیر رأس u به رئوس دیگر گراف.
- قطر گراف: بزرگ‌ترین مقدار مرکزگریزی رئوس.

یکریخت (somorphic)

- دوگراف یک‌ریختند هرگاه: تناظر یک‌به‌یک بین یال‌ها و رئوس وجود داشته باشد و مفهوم حادث بودن حفظ شود.
- مثال

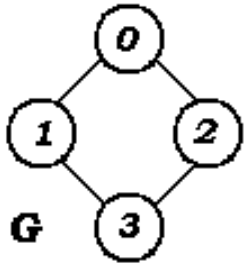
زیرگراف

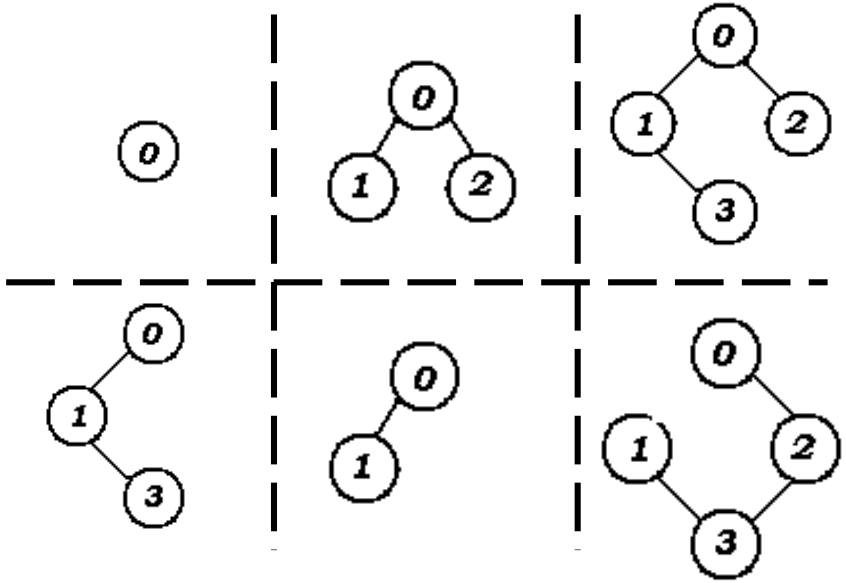
- زیرگراف: زیرگراف $G(V,E)$ زیرمجموعه‌ای از رئوس و یال‌ها به صورت $G'(V',E')$ است، که یال‌های E' تنها با رئوس V' حادث باشند. مثال.
- زیرگراف پوشا: اگر $V'=V$
- زیرگراف القا: اگر E' شامل همه یال‌هایی باشد که در گراف G رئوس V' را به‌هم متصل می‌نموده است.
- مکمل زیرگراف G' نسبت به G، زیرگراف $G''(V'',E'')$ است که $E''=E-E'$. V'' را نیز بعد از تعیین E'' از روی یال‌های حادث تعیین می‌کنیم.

یک زیر گراف از گراف G:

گرافی مانند G’ داریم به نحوی‌که $E(\acute{G}) \subseteq E(G)$ و $V(\acute{G}) \subseteq V(G)$ باشد.

به عنوان مثال گراف زیر را در نظر بگیرید تعدادی از زیرگراف‌های G عبارت اند از :





گراف کامل- مکمل گراف

- گراف n رأسی را کامل گوییم اگر بین هر دو رأس متمایز آن یالی باشد.
- تعداد یال‌ها در گراف کامل بی‌سو و سودار؟
- مکمل گراف G با n راس، مکمل آن نسبت به k_n است.

گراف چندگانه

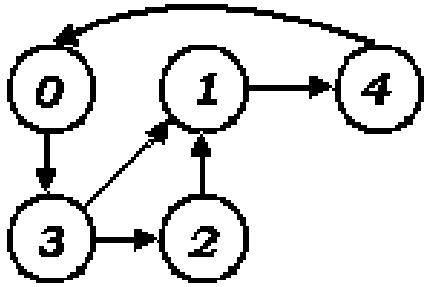
- گراف G(V,E) که E یک مجموعه‌ی چندگانه از زوج مرتب های V*V باشد.
  مثال:
- نکته: در گراف چندگانه هیچ محدودیتی برای تعداد یال‌های بین دو راس وجود ندارد.
- گراف غیر چندگانه = گراف خطی

گراف وزن‌دار

- اختصاص عدد به یال‌ها یا رئوس برای نشان دادن اطلاعات بیشتر.
- مثال: عدد

مسیر یا Path

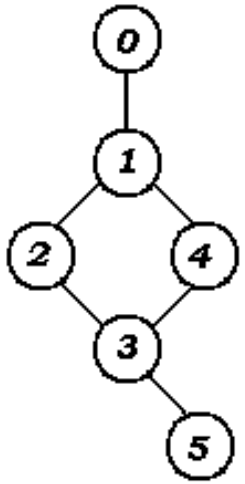
- در یک گراف بدون جهت یک مسیر از راس U به راس V دنباله‌ای از رئوس مثل $U\ i_1\ i_2\ \ldots\ i_k\ V$ می‌باشد به طوری‌که $(u, i_1), (i_1, i_2), \ldots, (i_k, v)$ همگی یال‌هایی در مجموعه‌ی $E(G)$ می‌باشد .



0, 3, 2, 1, 4
0, 3, 1, 4
0, 4 ✕

مسیر از 0 تا 4

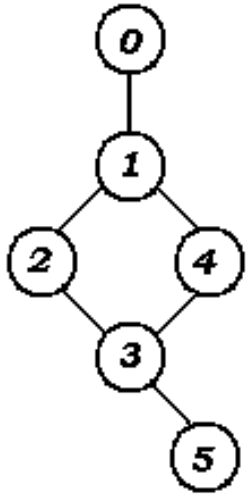
- مسیر ابتدایی: مسیری است که راس تکراری(دور) ندارد. به‌جز احتمالا در راس اول و آخر. (چرخه)



مسیر ساده : 0, 1, 2, 3, 5

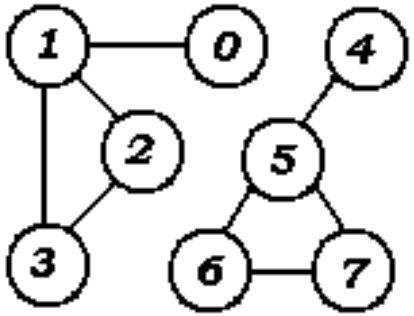
مسیر غیرساده : 0, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 5

- سیکل (چرخه): مسیری ساده است که راس اول و آخر آن یکی است. به عنوان مثال در گراف مثال قبل (1, 2, 3, 4, 1) یک سیکل را به وجود آورده است. (در یک سیکل فقط رئوس اول و آخر تکراری هستند.)



هم در گراف جهت‌دار و هم بدون جهت می‌توان سیکل را اعمال کرد.

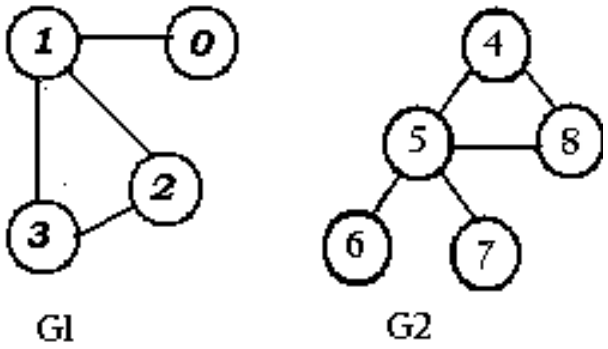
- در گراف‌های جهت‌دار معمولا به تعاریف فوق کلمه‌ی جهت‌دار اضافه می‌شود. (مثلاً می‌گوییم سیکل جهت‌دار یا مسیر جهت‌دار)
- در یک گراف بدون جهت مثل G دو راس را همبند گوییم در صورتی که بتوان مسیری از یکی به دیگری پیدا کرد.
- گراف بدون جهت همبند، گرافی است که بتوان بین هر دو راس آن مسیری پیدا کرد. به عنوان مثال



گراف روبه‌رو یک گراف غیرهمبند است.

مولفه اتصال گراف

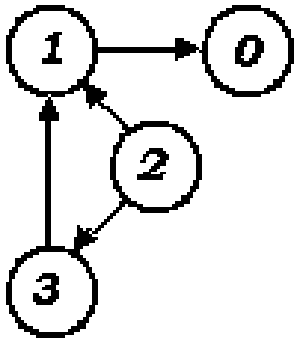
یک مولفه‌ی اتصال مانند H از یک گراف بدون جهت عبارت است از بزرگ‌ترین زیرگراف همبند در آن گراف. به عنوان مثال در گراف روبه‌رو مولفه اتصال G2 می‌شود چون تعداد عناصر G2 از G1 بیشتر است.



درخت، یک گراف هم‌بند و بدون چرخه است.

گراف همبند ضعیف: همان تعریف قبل(بدون درنظر گرفتن جهات گراف جهت‌دار)

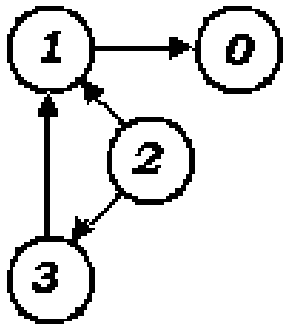
- گراف کاملا یا قویا همبند: گرافی جهت‌دار است که به ازای هر زوج **u,v** بتوان مسیری جهت‌دار از **u** به **v** و از **v** به **u** پیدا کرد.
- درجه گراف بدون جهت: درجه‌ی یک رأس عبارت است ازتعداد یال‌های متلاقی روی آن راس. درمثال قبل درجه‌ی رأس 4=5 و 1=0 می‌باشد.
- درجه وارده: درجه‌ی وارده به یک راس در گراف جهت‌دار عبارت است از تعداد یال‌هایی که به آن راس ختم می‌شود.



راس	درجه	درجه وارده	درجه خارجه
1	3	2	1
0	1	1	0
2	2	0	2
3	2	1	1

نمایش گراف

۱) ماتریس مجاورتی: برای یک گراف G با n رأس ماتریس مجاورتی آرایه‌ای دوبعدی و n*n می‌باشد که آن را A می‌نامیم. اگر (i,j) در گراف بدون جهت یا یال <i,j>در گراف جهت‌دار وجود داشته باشد آن گاه A (i,j) =۱ وگرنه ۰ خواهد بود.



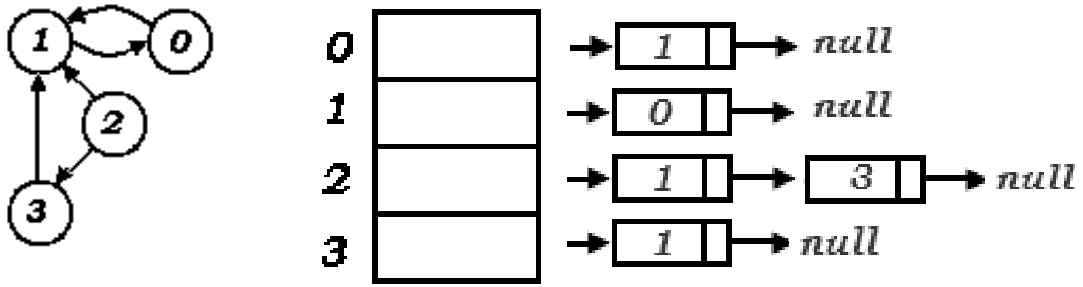
$$A[i][j] = ۰ \quad \text{اگر از } i \text{ به } j \text{ یال نداشته باشیم}$$

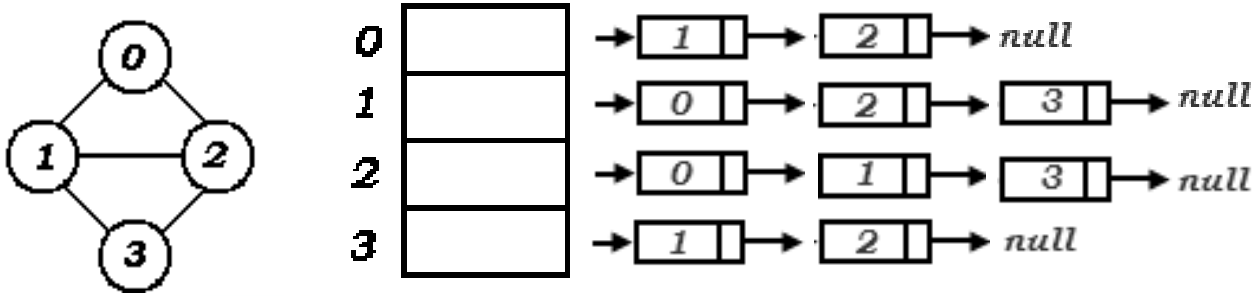
$$A[i][j] = ۱ \quad \text{اگر از } i \text{ به } j \text{ یال نداشته باشیم}$$

	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	1	0	0	0
2	0	1	0	1
3	0	1	0	0

- ماتریس مجاورتی گراف‌های بدون جهت روی قطر اصلی متقارن است اما در گراف‌های جهت‌دار ممکن است متقارن نباشد. هر سلول از ماتریس مجاورتی می‌تواند یک بیت از حافظه را اشغال کند، در نتیجه برای یک گراف جهت‌دار n^2 بیت لازم است.

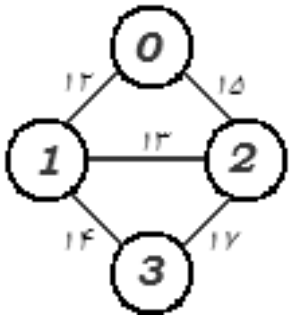
۲) لیست مجاورتی: در این روش n سطر ماتریس مجاورتی را به وسیله‌ی n لیست پیوندی نشان می‌دهند. در واقع برای هر رأس از گراف G یک لیست پیوندی وجوددارد.





نمایش یال‌های وزن‌دار

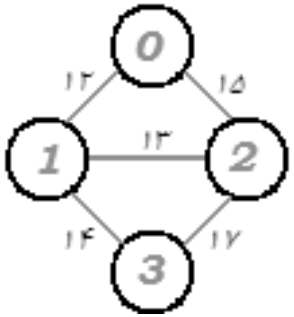
در بسیاری از کاربردها به هر یال عددی نسبت داده می‌شود. در چنین گراف‌هایی ماتریس مجاورتی می‌تواند حاوی وزن یال‌ها باشد. به عنوان مثال در گراف زیر ماتریس مجاورتی به شکل زیر خواهد بود.

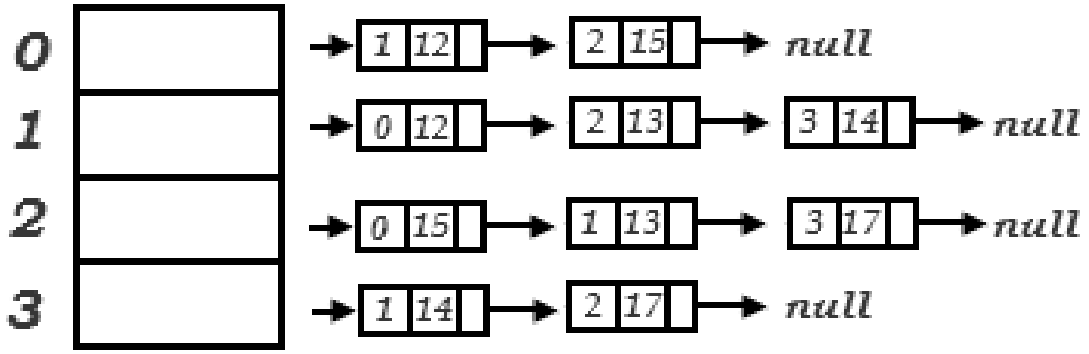


	0	1	2	3
0	0	12	15	∞
1	12	0	13	14
2	15	13	0	17
3	∞	14	17	0

لیست مجاورتی می‌تواند برای نمایش گراف‌های وزن‌دار به کار گرفته شود.

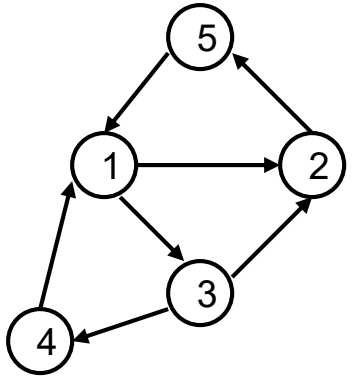
کافی است به هر گره در لیست پیوندی فیلدی جهت وزن آن اضافه کنیم.

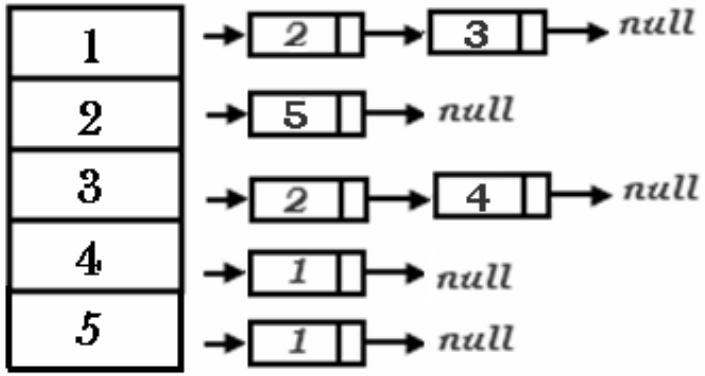




- نکته: درجه هر رأس در یک گراف بدون جهت برابر است با تعداد گره‌های مربوط به آن رأس در لیست مجاورتی مربوط. واضح است که تعداد گره‌های موجود در کل لیست مجاورتی برابر است با ۲برابر تعداد یال‌ها .
- نکته: در یک گراف جهت‌دار تعداد کل گره‌های لیست مجاورتی برابر با تعداد یال‌های گراف می‌باشد.
- نکته: در گراف‌های جهت‌داری که بررسی کردیم لیست مجاورتی، گره‌هایی را نشان می‌داد که مجاور از گره موردنظر ما بودند.

مثال

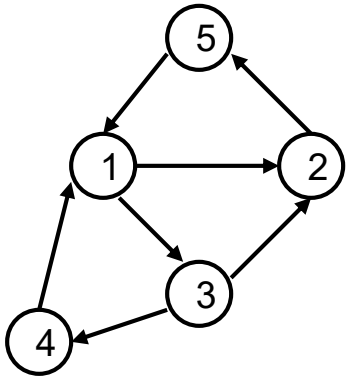


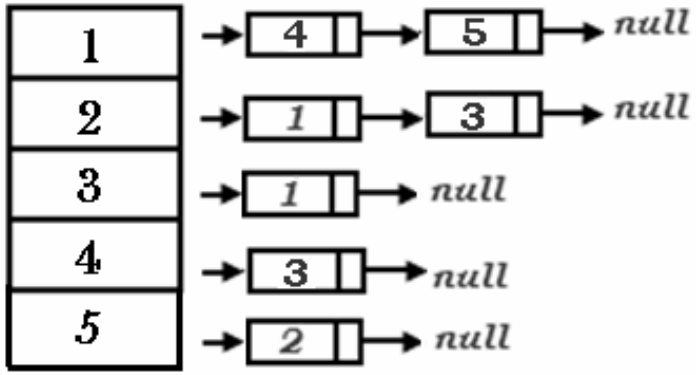


لیست مجاورتی

- لیست مجاورتی معکوس: در برخی از موارد می خواهیم رئوس مجاور به رأس موردنظرمان را مشخص کنیم. درچنین مواردی از لیست مجاورتی معکوس استفاده می‌شود. در لیست مجاورتی معکوس همان‌طور که گفته شد به ازای هر رأس رئوس مجاور به آن در لیست پیوندی قرار می‌گیرد.

با توجه به گراف مثال قبل، لیست مجاورتی معکوس را ایجاد کرده‌ایم:





ماتریس مجاورتی معکوس

مسیر و مدار اویلری (Eulerian Path)

- مسیری که از هر یال گراف یک و فقط یک بار عبور کند.
- مسیر ساده؟
- مدار اویلری: مداری که از ...
- مثال

قضیه

- شرط لازم و کافی برای وجود مدار اویلری در گراف بی‌جهت:

۱.گراف همبند ۲. درجه تمامی رئوس زوج باشد.

- شرط لازم و کافی برای وجود مسیر اویلری در گراف بی‌جهت:

یا مدار اولری دارد یا: ۱.گراف همبند ۲.تنها درجه دو رأس فرد باشد. (ابتدا و انتهای مسیر)

قضیه

- شرط لازم و کافی برای وجود مدار اویلری در گراف جهت‌دار:

۱. گراف همبند ۲. $\deg^{-}(v) = \deg^{+}(v)$ برای تمام رئوس

- شرط لازم و کافی برای وجود مسیر اویلری در گراف جهت‌دار:

۱. گراف همبند ۲. برای n-2 رأس، درجه ورودی و خروجی برابر باشد. برای یک رأس، درجه ورودی ۱ واحد بیشتر از درجه خروجی، برای یک راس درجه خروجی ۱ واحد بیشتر از درجه ورودی

مسیر و مدار همیلتونی (Hamilton Path)

- مسیر همیلتونی: مسیری که از هر رأس یک و فقط یک بار عبور کند.
- مدار همیلتونی: مداری که ...
- قضیه ۱: اگر در یک گراف ساده برای هر دو گره غیرمجاور v و u بتوان نوشت $\deg(v) + \deg(u) \geq n$ آن‌گاه مدار همیلتونی داریم.
- قضیه ۲: اگر در یک گراف ساده برای هر دو گره غیرمجاور v و u بتوان نوشت $\deg(v) + \deg(u) \geq n-1$ آن‌گاه مدار همیلتونی داریم.

قضیه

- اگر گراف ساده حداقل $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)=2$ یال داشته باشد ⇐ مدار همیلتونی دارد.
- در گراف دو بخشی اگر تعداد رئوس دو بخش برابر نباشد، دور همیلتونی ندارد.
  همچنین اگر تعداد رئوس دو بخش بیشتر از ۲ واحد اختلاف داشتند مسیر همیلتونی ندارد.
- تعداد دور با طول m در گراف کامل
- $\binom{n}{m}\frac{(m-1)!}{2}$

الگوریتم دایجسترا: کوتاه‌ترین مسیر

- DIJKSTRA(G, w, s)
  - INITIALIZE-SINGLE-SOURCE(G,s)
  - $S \leftarrow \emptyset$
  - $Q \leftarrow V[G]$
  - **while** $Q \neq \emptyset$
    - **do** $u \leftarrow$ EXTRACT-MIN(Q)
      - $S \leftarrow S \cup \{u\}$
      - **for** each vertex $v \in Adj[u]$
        - **do** RELAX(u, v, w)

INITIALIZE-SINGLE-SOURCE(G, s)
  for each vertex $v \in V[G]$
    do $d[v] \leftarrow \infty$
    $\pi[v] \leftarrow$ NIL
  $d[s] = 0$

RELAX(u, v, w)
  if $d[v] > d[u] + w(u, v)$
  then $d[v] \leftarrow d[u] + w(u, v)$
    $\pi[v] \leftarrow u$

قاعده نزدیک‌ترین همسایه

- به‌دست آوردن دور همیلتونی نیمه‌بهینه H از گراف G
- a = {x}; رأس دل‌خواهی را رأس شروع قرار دهید
- P=a; H=ϕ; T = V-{a}
- For i=1 to n-1
    - y = extract_min (T,x); رأسی که کم‌ترین وزن یال را دارد
    - H = H∪ {x,y}; x=y;
- H = H∪ {x,a};

گراف مسطح یا هامنی

- اگر گرافی را در صفحه دوبعدی به‌گونه‌ای بتوان رسم کرد که یال‌های آن جز در رئوس همدیگر را قطع نکنند، گراف مسطح است.
- زیربخش مقدماتی (مشتق ابتدایی elementary subdivision): اگر در گراف ساده و بی‌سوی G یال (w,u) را حذف و یال (v,u) , (w,v) را اضافه کنیم، به زیربخش مقدماتی از G خواهیم رسید. v∈V(G)
- هم‌ریختی (hemeomorphic) دو گراف G1, G2 : ۱. یا یکریخت باشند ۲. یا از گراف ساده و بی جهت H به‌وسیله یک رشته از زیربخش‌ها بدست آیند.

- یک ناحیه ازگراف هامنی، ناحیه‌ای از صفحه است که به یال‌های گراف محدود بوده و قابل تقسیم به زیرنواحی نیست. (اگر گراف را در امتداد یال‌ها ببریم، نواحی جدا می‌شوند)
- ناحیه متناهی : مساحت متناهی

- فرمول اولر برای گراف مسطح همبند: (r تعداد نواحی، e و n به‌ترتیب تعداد یال‌ها و رئوس گراف است.)
- $r = e-n+2$
- در گراف ساده مسطح :
- $e \leq 3n -6$

به‌طور مثال k5 مسطح نیست چون $10 > 3*5-6$

- قضیه کوراتاوسکی: اگر گرافی شامل زیرگرافی هم‌ریخت با K5 با K3,3 نداشته باشد، هامنی است.

رنگ‌آمیزی گراف

- نسبت دادن رنگ به رئوس مجاور گراف به گونه‌ای که رئوس مجاور هم‌رنگ نباشند.
- عدد کروماتیک: حداقل تعداد رنگ لازم. $X(G)$
- چندجمله‌ای کروماتیک: تابعی که تعداد رنگ‌آمیزی‌های متمایز گراف را نشان می‌دهد.
- مثال...
- عدد کروماتیک k_n؟ $k_{n,m}$ ؟

- مقدار چندجمله‌ای کروماتیک به ازای ۰ و به ازای ۱ برابر ۰ است. مجموع ضرایب کروماتیک ۰ است.
- استثنا: گراف تهی دارای عدد رنگی ۱ است. چندجمله‌ای کروماتیک آن λ است.

جستجوی اول عمق dfs

- DFS(G)
  - **for** each vertex $u \in V[G]$
    - **do** $color[u] \leftarrow$ WHITE
      - $\pi[u] \leftarrow$ NIL
  - $time \leftarrow 0$
  - **for** each vertex $u \in V[G]$
    - **do if** $color[u]$ = WHITE
      - **then** DFS-VISIT(u)

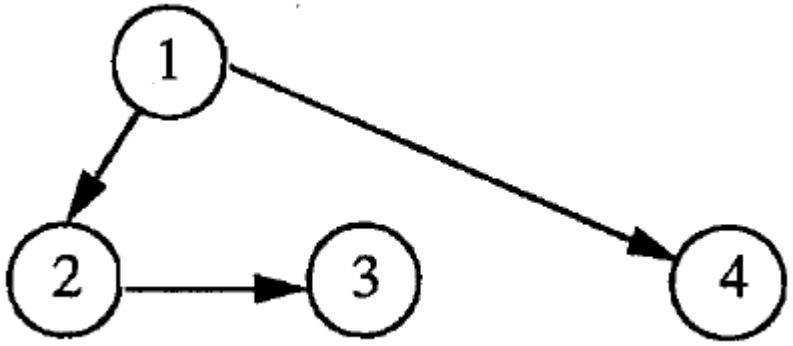
- DFS-VISIT(u)
  - $color[u] \leftarrow$ GRAY ▹ White vertex u has just been discovered.
  - $time \leftarrow time + 1$
  - $d[u] \leftarrow time$
  - **for** each $v \in Adj[u]$ ▹ Explore edge(u, v).
    - **do if** $color[v]$ = WHITE
      - **then** $\pi[v] \leftarrow u$
        - DFS-VISIT(v)
  - $color[u] \leftarrow$ BLACK
  - $f[u]$ ▹ $time \leftarrow time + 1$

استدلال مرتبه زمانی

- $\Theta(V + E)$، تابع اول دو حلقه با مرتبه $\Theta(V)$ دارد. تابع دوم برای هر راس تنها یک بار فراخوانی می‌شود و در هر بار مجاورین آن راس را می‌پیماید. (کلا مرتبه $\Theta(E)$ دارد.)
- تشخیص پرانتزگذاری درست: شروع پیمایش یک راس برابر پرانتز باز. اتمام برابر پرانتز بسته.

مرتب‌سازی توپولوژیکی

- مرتب‌سازی توپولوژیکی گره‌های یک گراف بدون دور را به‌گونه‌ای فهرست‌بندی می‌کند که اگر یال (i,j) در گراف قرار دارد، گره i قبل از گره j در فهرست بیاید.
- مثال:
- انواع روشهای مرتب کردن
- 1,2,3,4
- 1,2,4,3
- 1,4,2,3

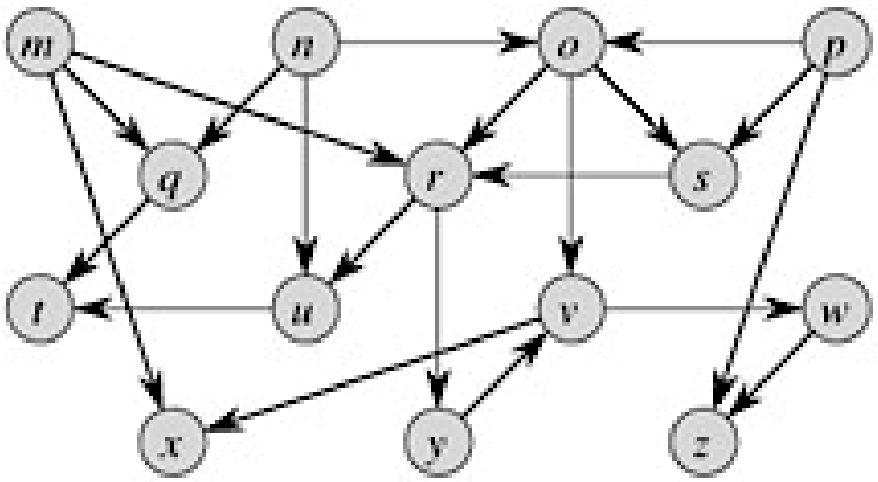


اهمیت و الگوریتم

- نمایش حالات مختلف یک پروژه بزرگ و فعالیت‌ها و زیرفعالیت‌های آن و سپس یافتن حالات انجام آن و ترتیب عملیات‌ها (مثلا تعریف نحوه لباس پوشیدن یک ربات)

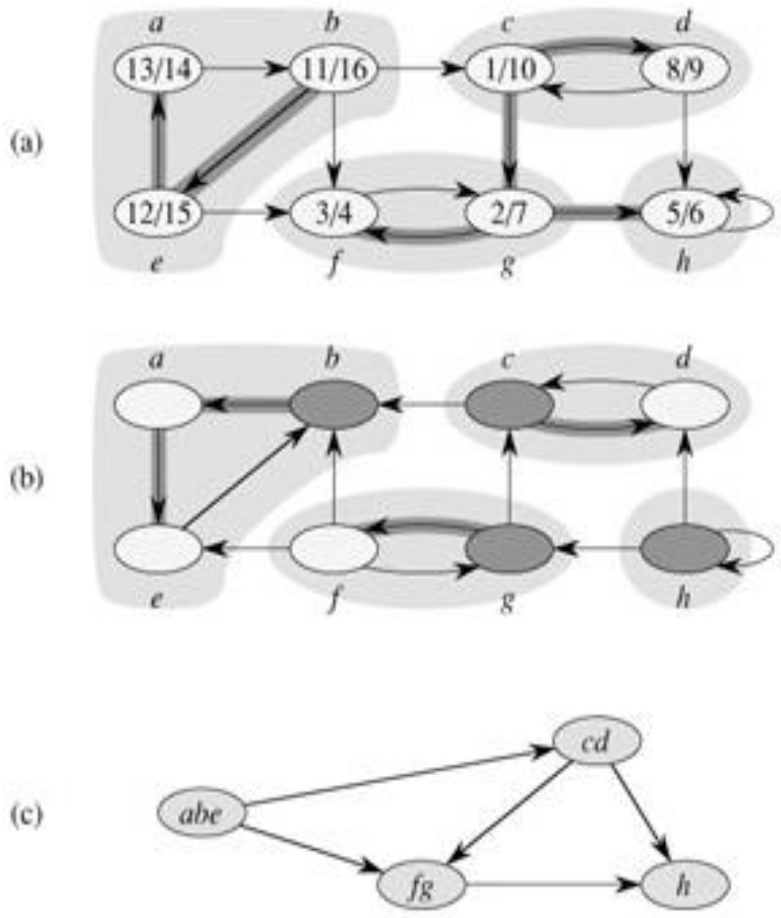
- TOPOLOGICAL-SORT(G)
  - call DFS(G) to compute finishing times $f[v]$ for each vertex v
  - as each vertex is finished, insert it onto the front of a linked list
  - **return** the linked list of vertices

- مثال



مولفه‌های قویا همبند

- مجموعه‌هایی متشکل از بیشترین تعداد رئوس، به‌طوری‌که در هر یک از مجموعه‌ها همه رئوس به هم مسیر دارند.


(a)
a
b
c
d
13/14
11/16
1/10
8/9
12/15
3/4
2/7
5/6
e
f
g
h
(b)
a
b
c
d
e
f
g
h
(c)
abe
cd
fg
h

الگوریتم

- STRONGLY-CONNECTED-COMPONENTS (G)
  - call DFS (G) to compute finishing times $f[u]$ for each vertex u
  - compute G^T
  - call DFS (G^T), but in the main loop of DFS, consider the vertices in order of decreasing $f[u]$ (as computed in line 1)
  - output the vertices of each tree in the depth-first forest formed in line 3 as a separate strongly connected component