بسمه تعالی

ساختمان‌های گسسته

۹۹-۱۳۹۸ / ترم ۱

فصل ۷: درخت‌ها

دورنما

- تعاریف و خواص
- درخت‌های ریشه دار
- درخت‌های پوشا
- درخت‌های پوشای مینیمم

تعریف

- درخت: گراف بدون جهت، بدون حلقه، هم‌بند، بدون دور
- جنگل: ... (همبند نیست)

قضیه

- مسیر منحصربه‌فردی بین زوج رئوس یک درخت وجود دارد.
- اگر $T=(V,E)$ یک درخت با $|V|>1$ باشد، حداقل یک راس وجود دارد که درجه آن مساوی یک است. (برگ)
- اگر $T=(V,E)$ یک درخت باشد، داریم: $|E| = |V| -1$
- لم: اگر $T=(V,E)$ یک درخت با $|V|>2$ باشد، دست‌کم دو رأس از درجه یک دارد.

فرض: $|V| = n \longrightarrow \sum_{i=1}^{n} \deg(v_i) = 2|E| = 2(n-1) = 2n-2$

تنها یک رأس از درجه ۱ داریم $\longrightarrow \deg(vi) \geq 2,\ i = 2, \ldots, n$

$\longrightarrow \sum_{i=1}^{n} \deg(vi) = 1+\sum_{i=1}^{n} \deg(vi) \geq 1+2n-2 = 2n-1$

$\longrightarrow -2 \geq -1$ تناقض

قضیه

- اگر دو رأس غیر مجاور از درخت T را به هم وصل کنیم، در گراف حاصل یک دور ایجاد می‌شود. (استفاده از قضیه ۱)
- گراف $G=(E,V)$ یک درخت است اگر و تنها اگر دوری نداشته و $|E|=|V|-1$ باشد.

- عبارات زیر در مورد گراف بدون جهت و بدون حلقه G(V,E) هم‌ارزند:
  - یک درخت است.
  - هم‌بند است ولی حذف هر کدام از یال‌های آن باعث می‌شود که G به دو زیرگراف که هرکدام از آن‌ها یک درخت است، تجزیه شود.
  - شامل هیچ دوری نیست و $|E| = |V| - 1$.
  - هم‌بند است و $|E| = |V| - 1$.
  - شامل هیچ دوری نیست ولی اگر دو رأس غیر مجاور آنرا به هم وصل کنیم دقیقا یک دور خواهد داشت.

درخت ریشه دار

- درخت سودار: گراف سوداری که بدون در نظر گرفتن جهت یال‌ها درخت باشد.
- درخت ریشه دار: درخت سوداری با رأس منحصربه‌فرد r به نام ریشه که $\deg^-(r)=0$ و برای رئوس دیگر درخت مانند v، $\deg^-(v)=1$.
- در یک درخت، رئوسی با $\deg^+(v)=0$ چه نام دارند؟
- برگ، گره خارجی، رأس خارجی- گره داخلی، گره ریشه

- تراز یک رأس = فاصله از ریشه (طول مسیر)
- پدر، فرزند، نیا، نواده

درخت ریشه دار مرتب

1. ریشه را با صفر برچسب می‌زنیم.
2. رئوس تراز یک را از چپ به راست با ۱ و ۲ و ۳ و... برچسب می‌زنیم.
3. اگر v رأس داخلی با تراز بزرگ‌تر مساوی یک باشد و با a برچسب بخورد، به فرزندانش برچسب $a_1, a_2, \ldots$ زده می‌شود.

- این روش به سیستم نشانی عمومی معروف است و هر رأس که به صورت $a_1, a_2, \ldots, a_n$ برچسب خورده باشد در تراز n است.
- اگر u و v دو رأس با نشانی $b = a_1, \ldots, a_m$ و $c = a_1, \ldots, a_n$ باشد گوییم $b<c$ اگر: ۱. $m<n$ ۲. $a_m<a_n$

درخت دودویی

- یک درخت ریشه دار را درخت ریشه دودویی گوییم هرگاه به ازای هر رأس v درجه خروجی آن صفر، یک یا دو باشد.
- در کامپیوتر درخت‌های دودویی که به ازای هر $deg^+(v) = 0$ یا $deg^+(v) = 2$ است برای نمایش عملیات دودویی استفاده می‌شوند.

پیمایش‌های درخت - انواع ترتیب درخت

اگر T درختی با ریشه‌ی r باشد و فقط همین ریشه را داشته باشد خود ریشه پیمایش پیش‌ترتیب و پس‌ترتیب را تشکیل می‌دهد و اگر $|V|>1$ با فرض $T_1, \ldots, T_k$ زیردرخت‌های T از چپ به راست داریم:

1. پیمایش پیش‌ترتیب، نخست ریشه r سپس رئوس T_1 را به صورت پیش‌ترتیب آن‌گاه T_2 الی T_k را به همین ترتیب ملاقات می‌کند.
2. پیمایش پس‌ترتیب، نخست رئوس $T_1, \ldots, T_k$ را به ترتیب به صورت پس‌ترتیب و سپس ریشه را ملاقات می‌کند.

- زیردرخت‌های چپ و راست باشند، نخست T_L به صورت میان‌ترتیب سپس ریشه و سپس T_R به صورت میان‌ترتیب پیمایش می‌شود.

- مثال

- درخت‌های پوشا: زیرگراف H از گراف G(V, E) را یک درخت پوشا برای G می‌گوییم هرگاه:

1. یک درخت باشد.
2. همه‌ی رئوس V را شامل شود.

- درخت پوشایی که سو دار باشد درخت پوشای سو دار نامیده می‌شود.

رتبه مداری

- اگر گراف G هم‌بند باشد، تعداد یال‌هایی که باید برای به دست آوردن درخت پوشا از G حذف کرد برابر $|E|-|V|+1$ است. این عدد را رتبهٔ مداری G می‌گوییم. (یال‌هایی که حذف می‌شوند از هر دور گراف انتخاب می‌شوند.)

الگوریتم‌های یافتن درخت پوشا

1. قضیه: گراف بی سوی G(V, E) هم‌بند است اگر و تنها اگر شامل درخت پوشا باشد. (این الگوریتم کارا نیست چون زمان پیدا کردن دورها بسیار زیاد است.)
2. جستجوی اول سطح (BFS)
3. جستجوی اول عمق (DFS)

الگوریتم DFS

1. $v_1 \rightarrow v$, $\{v_1\} \rightarrow V_1$. v_1 ریشه درخت T خواهد بود. V1 ملاقات شد. $E_1 = \emptyset$
2. $2 \le i \le n$ کوچک‌ترین اندیسی است که $\{v, v_1\} \in E$ و رأس v_i قبلا ملاقات نشده‌است.

اگر این اندیس وجود نداشت به مرحله 3 می‌رویم. در غیر این صورت:

الف. $V_1 = V_1 \cup v_i$, $E_1 = E_1 \cup \{v, v_i\}$. v_i ملاقات شد.

ب. $v_i \rightarrow v$

ج. به مرحله 2 می‌رویم.

3. اگر $V \neq V_1$ درخت پوشای ریشه‌دار و سو دار برای G است و الگوریتم خاتمه می‌یابد.
4. اگر $\overline{V} \neq V_1$ ، اگر u پدر v در درخت باشد $u \rightarrow v$ و به مرحله 2 می‌رویم.

الگوریتم BFS

1. v را درج می‌کنیم. $V_1 = v_1, E_1 = \emptyset$. v_1 ملاقات شد.
2. اگر صف خالی است T درخت پوشای ریشه‌دار و سو دار برای G است و الگوریتم خاتمه می‌یابد. در غیر این صورت رأس v را از سر صف برداشته، برای این رأس $2 \le i \le n$ را بررسی می‌کنیم. اگر v_i ملاقات نشده بود و $\{v, v_i\} \in E$ در این صورت:

   الف. $E_1 = E_1 \cup \{v, v_i\}, V_1 = V_1 \cup v_i$

   ب. رأس v_i ملاقات شده و در آخر صف Q درج می‌شود.

   ج. به مرحله 2 می‌رویم.

درخت پوشای مینیمم MST

- در گراف‌های وزن‌دار درخت پوشای مینیمم درخت پوشایی است که $\sum_{i=0}^{n} C_i$ در آن مینیمم است.
- برای یافتن این درخت‌ها دو الگوریتم کراسکال و پریم وجود دارد.

الگوریتم کراسکال

1. $i = 1$ فرض $C_i \in E$ یالی (غیر از حلقه) از G با $C(e)$ مینیمم.
2. برای $1 \le i \le n-2$ اگر یال‌های $e_1, \ldots, e_i$ قبلا انتخاب شده‌اند از میان بقیه یال‌ها e_{i+1} را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که:
   الف. C_{i+1} مینیمم باشد.
   ب. زیرگراف تشکیل شده، تشکیل هیچ دوری ندهد.
3. $i+1 \longrightarrow i$: ۱. اگر $i = n-1$ زیرگراف حاصل هم‌بند، دارای n رأس و $n-1$ یال بوده و درخت پوشای مینیمم است، پس الگورتیم خاتمه می‌یابد. ۲. اگر $i < n-1$ به مرحله 2 می‌رویم.

الگوریتم پریم

1. $\{v_i\} \rightarrow P$, $1 \rightarrow i$ که $v_1 \in V$, $V - \{v_1\} \rightarrow w$, $T = \emptyset$.
2. برای $1 \le i \le n-1$ ، فرض $P = \{v_1, \ldots, v_i\}$, $T = \{e_1, \ldots, e_{i-1}\}$, $N = V-P$ ، به T یال دارای کم‌ترین هزینه را که رأسی مثل $x \in P$ را به رأسی مثلا $y = (v_{i-1})$ ،از N وصل می‌کند، اضافه می‌کنیم. $P \cup \{y\} \rightarrow P$, $N-\{y\} \rightarrow N$
3. $i+1 \rightarrow i$ ، اگر $i=n$ زیرگراف تعریف شده به وسیله یال‌ها $e_1, \ldots, e_{n-1}$ هم‌بند دارای n رأس و n-1 یال است و درخت پوشای مینیمم برای G است. اگر $i<n$ الگوریتم از مرحله 2 تکرار می‌شود.