Simplification of Context-free grammars

21 November 2010
19:28

ساده سازی گرامرهای مستقل از متن و فرم های نرمال

$$\left.\begin{array}{l} A \to x_1 B x_2 \\ B \to y_1 | \cdots | y_n \end{array}\right\} \Rightarrow \quad A \to x_1 y_1 x_2 | \cdots | x_1 y_n x_2$$

Removing Useless Productions

$S \to aSb \mid \lambda \mid A$

$A \to aA$

تعریف :

A : useful iff $\exists w \in L(G) : S \overset{*}{\Rightarrow} xAy \overset{*}{\Rightarrow} w$

otherwise

A : useless

مثال) $S \to A$
$A \to aA \mid \lambda$
$B \to bA$

مثال) $S \to aS \mid A \mid C$
$A \to a$
$B \to aa$
$C \to aCb$

Removing $\lambda$-productions

تعریف :

$A \to \lambda$ : $\lambda$-production
$A \overset{*}{\Rightarrow} \lambda$ : nullable (پوچ)

مثال) $S \to aS_1b$ nullable $= \{S_1\}$ $S \to aS_1b \mid ab$

amitisweb.com

$S_1 \to aS_1b \mid \lambda \longrightarrow S_1 \to aS_1b \mid ab$

مثال)

$S \to ABaC$
$A \to BC$
$B \to b \mid \lambda$
$C \to D \mid \lambda$
$D \to d$

nullable = $\{B, C, A\}$

$S \to ABaC \mid BaC \mid AaC \mid ABa \mid aC \mid Ba \mid Aa \mid a$
$A \to BC \mid C \mid B$
$B \to b$
$C \to D$
$D \to d$

* از هر گرامری که زبان آن فاقد رشته $\lambda$ باشد، می‌توان بدون تغییر زبان قواعد $\lambda$ را حذف نمود.

## Removing Unit-Productions

تعریف :

$A \to B$ : Unit-Production

مثال)

$S \to Aa \mid B$
$B \to A \mid bb$
$A \to a \mid bc \mid B$

$S \to Aa$
$B \to bb$
$A \to a \mid bc$

$S \to bb \mid a \mid bc$
$B \to a \mid bc$
$A \to bb$

$S \to Aa \mid bb \mid a \mid bc$
$B \to bb \mid a \mid bc$
$A \to a \mid bc \mid bb$

مراحل ساده سازی یک گرامر :

① حذف قواعد $\lambda$

amirisweb.com

۲) حذف قواعد Unit
۳) حذف قواعد Useless

مثال)

$$\begin{array}{l} S \to AaB \mid aaB \\ A \to \lambda \\ B \to bbA \mid \lambda \end{array} \xrightarrow[\text{nullable} = \{A, B\}]{\text{حذف } \lambda} \begin{array}{l} S \to AaB \mid aB \mid Aa \mid a \mid aaB \mid aa \\ X \\ B \to bbA \mid bb \end{array}$$

$$\xrightarrow{\text{حذف Unit}}$$ نداریم

$$\xrightarrow{\text{حذف useless}} \begin{array}{l} S \to aB \mid a \mid aaB \mid aa \\ B \to bb \end{array}$$

amitisweb.com

## فرم‌های نرمال (Normal Forms)

CNF : Chomskey Normal Form

$\hookrightarrow$ $A \to BC$
$A \to a$

$A, B, C \in V$
$a \in T$

مثال)

$$\begin{array}{l} S \to ABa \\ A \to aab \\ B \to Ac \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} S \to ABX_a \\ X_a \to a \\ A \to X_aX_aX_b \\ X_b \to b \\ B \to AX_c \\ X_c \to c \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} S \to AZ_1 \\ Z_1 \to BX_a \\ X_a \to a \\ A \to X_aZ_2 \\ Z_2 \to X_aX_b \\ X_b \to b \\ B \to AX_c \\ X_c \to c \end{array}$$

* هر زبان مستقل از متن که فاقد رشته $\lambda$ باشد دارای گرامر به فرم نرمال چامسکی است.

[illegible] ۱ حذف قواعد $\lambda$ ، ۲ حذف قواعد Unit ، ۳ حذف قواعد [illegible]

* [illegible]

$A \to aab$ $\longrightarrow$ $A \to X_a Z_1$
$B \to abc$ $\qquad$ $B \to Z_1 X_c$

* تعداد مراحل لازم برای تولید رشته‌ای بطول $n$ چند است؟

$$S \overset{n-1}{\Rightarrow} A_1 \cdots A_n \overset{n}{\Rightarrow} a_1 \cdots a_n$$

$$n-1+n = 2n-1$$

## GNF: Greibach Normal Form

$\hookrightarrow$ $A \to aX$

$a \in T$
$X \in V^*$

مثال) $S \to AB$
$A \to aA \mid bB \mid b$
$B \to b$

$S \to aAB \mid bBB \mid bB$
$\vdots$

مثال) $S \to abSb \mid aa$

$S \to aX_bSX_b \mid aX_a$
$X_a \to a$
$X_b \to b$

* اگر یک زبان مستقل از متن فاقد رشته $\lambda$ باشد، برای آن یک فرم GNF وجود دارد.

* مراحل تبدیل: ۱- حذف چپگردی ، ۲- حذف قواعد $\lambda$ ، ۳- حذف قواعد Unit ، ۴- جایگذاری

* حذف چپگردی:

$A \to A\alpha_1 \mid \cdots \mid A\alpha_n$
$A \to \beta_1 \mid \cdots \mid \beta_m$

amitisweb.com

* $(\beta_1 + \cdots + \beta_m)(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n)$

$$A \to \beta_1 A' \mid \cdots \mid \beta_m A'$$
$$A' \to \alpha_1 A' \mid \cdots \mid \alpha_n A' \mid \lambda$$

* تعداد مراحل مورد نیاز برای تولید رشته ای بطول n $\Theta$

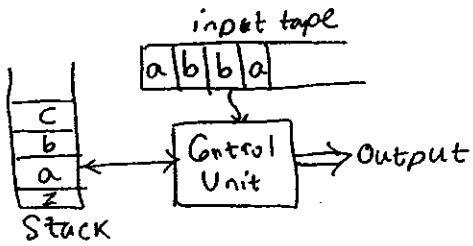
یک الگوریتم عضویت برای گرامرهای مستقل از متن (CYK)

Created with Microsoft Office OneNote 2007
One place for all your notes and information

amitisweb.com

# ush-Down Automata (PDA)

210, 28Sunday, November
05:14




PDA → NPDA
PDA → DPDA

**NPDA:**

$M: (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, z, F)$

مجموعه حالات

الفبای زبان

الفبای Stack

Stack Start symbol
$z \in \Gamma$

$\delta: Q \times (\Sigma \cup \{\lambda\}) \times \Gamma \to$ finite subsets of $Q \times \Gamma^*$

توضیح انواع حرکات قابل انجام توسط یک PDA:

$\delta(q_0, a, c) = \{(q_1, xc), (q_1', xxc)\}$

$\delta(q_1, b, x) = \{(q_2, y)\}$

$\delta(q_2, b, y) = \{(q_3, \lambda)\}$

$\delta(q_3, \lambda, c) = \{(q_4, c)\}$

Instantaneous Description (توصیف لحظه‌ای)

$(q, \alpha, \beta)$

حالت جاری

باقی‌مانده رشته ورودی

محتوای Stack

Satisfy

$(q_0, abba, cbaz) \vdash (q, bba, acbaz)$

amitisweb.com

$\vdash (q_1', bba, xxcbaz)$

: PDA پذیرش توسط

1- Acceptance by final state $(M:(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,z,F))$

$$L(M)=\{w\in\Sigma^* \mid (q_0,w,z)\vdash^* (q_f,\lambda,\gamma),\ q_f\in F,\ \gamma\in\Gamma^*\}$$

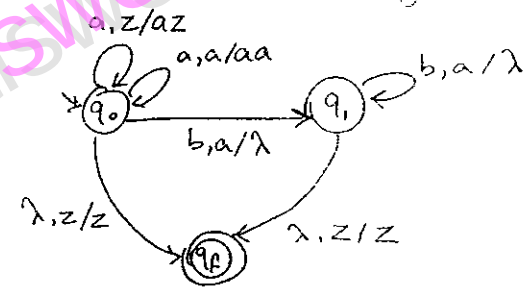
2- Acceptance by empty stack $(M:(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,z))$

$$L(M)=\{w\in\Sigma^* \mid (q_0,w,z)\vdash^* (p,\lambda,\lambda),\ p\in Q\}$$

amitisweb.com

مثال :

$L=\{a^n b^n \mid n\geq 0\}$




$\delta(q_0,\lambda,z)=\{(q_f,z)\}$
$\delta(q_0,a,z)=\{(q_0,az)\}$
$\delta(q_0,a,a)=\{(q_0,aa)\}$
$\delta(q_0,b,a)=\{(q_1,\lambda)\}$
$\delta(q_1,b,a)=\{(q_1,\lambda)\}$
$\delta(q_1,\lambda,z)=\{(q_f,z)\}$

$L=\{a^n b^{n+1} \mid n\geq 0\}$

$\delta(q_0,b,z)=\{(q_f,z)\}$
$\delta(q_0,a,z)=\{(q_0,az)\}$
$\delta(q_0,a,a)=\{(q_0,aa)\}$
$\delta(q_0,b,a)=\{(q_1,\lambda)\}$
$\delta(q_1,b,a)=\{(q_1,\lambda)\}$
$\delta(q_1,\lambda,z)=\{(q_f,z)\}$

$L=\{ww^R \mid w\in\{a,b\}^*\}$

$\delta(q_0,\lambda,z)=\{(q_f,z)\}$

$\delta(q_0, a, z) = \{(q_0, az)\}$
$\delta(q_0, b, z) = \{(q_0, bz)\}$
$\delta(q_0, a, a) = \{(q_0, aa), (q_1, \lambda)\}$
$\delta(q_0, b, a) = \{(q_0, ba)\}$
$\delta(q_0, a, b) = \{(q_0, ab)\}$
$\delta(q_0, b, b) = \{(q_0, bb), (q_1, \lambda)\}$

$\delta(q_1, a, a) = \{(q_1, \lambda)\}$
$\delta(q_1, b, b) = \{(q_1, \lambda)\}$
$\delta(q_1, \lambda, z) = \{(q_f, z)\}$

$L = \{a^n b^{2n} \mid n \geq 0\}$

$L = \{w \in \{a,b\}^* \mid n_a(w) = n_b(w)\}$

$L = \{a^n b^m c^{n+m} \mid n, m \geq 0\}$

$\delta(q_0, b, z) = \{(q_1, xz)\}$
$\delta(q_0, a, z) = \{(q_0, xz)\}$
$\delta(q_0, a, x) = \{(q_0, xx)\}$
$\delta(q_0, b, x) = \{(q_0, xx)\}$
$\delta(q_1, b, x) = \{(q_1, xx)\}$
$\delta(q_1, c, x) = \{(q_2, \lambda)\}$
$\vdots$

$\delta(q_0, b, z) = \{(q_0, bz)\}$
$\delta(q_0, a, z) = \{(q_0, az)\}$
$\delta(q_0, a, a) = \{(q_0, aa)\}$
$\delta(q_0, b, a) = \{(q_0, ba)\}$
$\delta(q_0, b, b) = \{(q_0, bb)\}$
$\delta(q_0, c, b) = \{(q_1, \lambda)\}$
$\delta(q_0, c, a) = \{(q_1, \lambda)\}$
$\vdots$

$L = \{a^3 b^n c^n \mid n \geq 1\}$

$\delta(q_0, a, z) = \{(q_1, z)\}$
$\delta(q_1, a, z) = \{(q_2, z)\}$
$\delta(q_2, a, z) = \{(q_3, z)\}$
$\delta(q_3, b, z) = \{(q_4, bz)\}$
$\vdots$

$L = \{a^{30} b^n c^n \mid n \geq 1\}$

$\delta(q_0, a, z) = \{(q_1, az)\}$

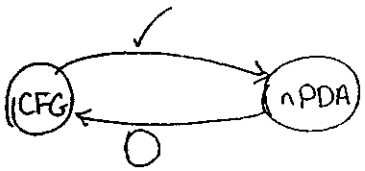
amitisweb.com

$\delta(q_{14}, a, a) = \{(q_{15}, aa)\}$
$\delta(q_{15}, a, a) = \{(q_{16}, \lambda)\}$
$\delta(q_{16}, a, a) = \{(q_{16}, \lambda)\}$
$\delta(q_{16}, b, z) = \{ \cdots$

$\delta(q_0, a, z) = \{(q_1, a^{29} z)\}$
$\delta(q_{11}, a, a) = \{(q_1, \lambda)\}$

$\delta(q_0, a, z) = \{(q_0, 1z)\}$
$\delta(q_0, a, 1) = \{(q_0, 2)\}$
$\delta(q_0, a, \frac{2}{9}) = \{(q_0, z')\}$
$\delta(q_0, b, z') = \cdots$

## The relation between CFG and NPDAs




CFG $\longrightarrow$ nPDA

$$\begin{cases} S \to aA \\ A \to aABC \mid bB \mid a \\ B \to b \\ C \to c \end{cases}$$

همیشه ثابت هستند $\begin{cases} \delta(q_0, \lambda, z) = \{(q, Sz)\} \\ \delta(q, \lambda, z) = \{(q_f, z)\} \end{cases}$

$S \to aA$
$\delta(q, a, S) = \{(q, A)\}$
$A \to aABC$
$\delta(q, a, A) = \{(q, ABC)\}$
$A \to bB$
$\delta(q, b, A) = \{(q, B)\}$
$A \to a$
$\delta(q, a, A) = \{(q, \lambda)\}$
$B \to b$
$\delta(q, b, B) = \{(q, \lambda)\}$
$C \to c$
$\delta(q, c, C) = \{(q, \lambda)\}$

aaabc

$S \Rightarrow aA \Rightarrow aaABC \Rightarrow aaaBC \Rightarrow aaabC \Rightarrow aaabc$

$(q_0, aaabc, z) \vdash (q, aaabc, Sz) \vdash (q, aabc, Az) \vdash (q, abc, ABCz) \vdash (q, bc, BCz)$
$\vdash (q, c, Cz) \vdash (q, \lambda, z) \vdash (q_f, \lambda, z)$

نتیجه: به ازای هر زبان مستقل از متن یک nPDA با سه حالت وجود دارد.

amitisweb.com

چه موقع یک PDA ، یک DPDA محسوب می‌شود ؟

باید دو شرط زیر برقرار باشد :

۱- $\delta(q,a,b)$ حداکثر یک عضو داشته باشد.

۲- اگر $\delta(q,\lambda,b)$ خالی نیست ، آنگاه $\delta(q,c,b)$ به ازای تمام $c \in \Sigma$ خالی باشد.

یک DPDA برای زبان $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$

$$M = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{a,b\}, \{0,1\}, \delta, q_0, 0, \{q_0\})$$

$$\delta(q_0, a, 0) = \{(q_1, 10)\}$$
$$\delta(q_1, a, 1) = \{(q_1, 11)\}$$
$$\delta(q_1, b, 1) = \{(q_2, \lambda)\}$$
$$\delta(q_2, b, 1) = \{(q_2, \lambda)\}$$
$$\delta(q_2, \lambda, 0) = \{(q_0, \lambda)\}$$

amitisweb.com

## LL(K) grammars

$S \to ab \mid cd \quad \to LL(1)$

$S \to ab \mid ad \quad \to LL(2)$

$\vdots$

$\to LL(K)$

$\begin{cases} S \to A \mid Ab \\ A \to aA \mid \lambda \end{cases} \quad \to LL(K)$ نیست

Created with Microsoft Office OneNote 2007
One place for all your notes and information

"فصل ۸"

# Properties of Content-free Languages

2010, 05Sunday, December
ساعت 07:31

## خواص زبان‌های مستقل از متن

* یک لم Pumping برای زبان‌های مستقل از متن

قضیه: فرض کنید $L$ یک زبان مستقل از متن نامتناهی باشد. آنگاه عدد صحیح و مثبت $m$ وجود خواهد داشت بطوریکه به ازای هر رشته $w \in L$ ، $|w| \geq m$ ، بتوان رشته $w$ را بصورت زیر شکست

$$w = uvxyz$$
$$|vxy| \leq m$$
$$|vy| \geq 1$$

بگونه‌ای که رشته $uv^ixy^iz \in L$ ، $i = 0, 1, 2, \ldots$

مثال) $L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$

$a^m b^m c^m$ $\qquad m$

اثبات: از روی برهان:

فرض $\rightarrow$ $L$: مستقل از متن نامتناهی $\Longrightarrow$ $S \rightarrow uAz$
$A \rightarrow vAy \mid x$

$$S \Rightarrow uAz \overset{*}{\Rightarrow} uv^iAy^iz \Rightarrow uv^ixy^iz \quad , i = 0, 1, 2, \ldots$$

$A \rightarrow v$

$$m = \sum_{A \rightarrow v \in P} |v| = f(|V|)$$

amitisweb.com

## Review جلسه ۸ قسمت ۲

* لم pumping برای زبان‌های خطی: زبان‌هایی که گرامر خطی داشته باشند.

قضیه: فرض: زبان L خطی نامتناهی است.

$|z| \geq m$ $\quad m$

$z \in L$

$$\begin{cases} w = uvxyz \\ |uvyz| \leq m \\ |vy| \geq 1 \end{cases}$$

مثال) $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid n_a(w) = n_b(w)\}$

طولانی‌ترین دور گرامر $S \to aSb \mid bSa \mid SS \mid \lambda$

در این مثال $\begin{cases} K = 3 \\ v = 1 \\ m = 3 \times 1 + 1 = 4 \end{cases}$

$a^m$ $\quad m$

$uvz$

بعد از طول

$A \to V$ , $|V| \leq K$ (طول $V$)

$m = K * |V| + 1$ (طول $V$)

$|V|$ تعداد ناترمینال‌ها

این خاصیت.

خواص بسیاری زبان‌های مستقل (از متن):

قضیه: خانواده زبان‌های مستقل از متن تحت عملگرهای $\cup$ ، $\cdot$ و $*$ بسته است.

$L_1 : CF \ (S_1 \to \cdots)$

$L_2 : CF \ (S_2 \to \cdots)$

(تحت این عملگرها بسته است)

$L_1 \cup L_2 : \ S \to S_1 \mid S_2$

$L_1 . L_2 : \ S \to S_1 S_2$

$L_1^* : \ S \to \lambda \mid S_1 S$

قضیه: خانواده زبان‌های مستقل از متن تحت عملگرهای اشتراک و مکمل بسته نیست.

amitisweb.com

جلسه ۸ قسمت ۲ voice

$L_1 = \{a^n b^n c^m \mid n, m \geq 0\}$ مستقل از متن

$L_2 = \{a^n b^m c^m \mid n, m \geq 0\}$ "

$L_1 \cap L_2 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$

$L_1 \cap L_2 = \overline{(\overline{L_1} \cup \overline{L_2})}$

قضیه: خانواده زبان‌های مستقل از متن تحت عملگر Regular Intersection بسته است.

مستقل از متن = مستقل از متن ∩ منظم

div $M_1 : (Q, \Sigma, \Gamma, \delta_1, q_0, z, F_1)$

دلتا $M_2 : (P, \Sigma, \delta_2, p_0, F_2)$

$\hat{M}$:
$\hat{Q} = Q \times P$
$\hat{q}_0 = (q_0, p_0)$
$\hat{F} = F_1 \times F_2$

$M_2 \to M_1$ دیگر باید در state ها باشیم که فاینال هر دو باشیم باشد.

مثال) آیا زبان زیر مستقل از متن است؟

$L = \{a^n b^n \mid n \geq 0, n \neq 100\}$

$= \underbrace{\{a^n b^n \mid n \geq 0\}}_{\text{مستقل از متن}} \cap \overline{\{a^{100} b^{100}\}}$ = مستقل از متن

اشتراک — منظم

مثال) آیا زبان زیر مستقل از متن است؟

$L = \{w \in \{a,b,c\}^* \mid n_a(w) = n_b(w) = n_c(w)\}$

نیست.

$L \cap L =$

amitisweb.com

فرض) L : CF

Regular Intersection طبق : $L \cap L(a^*b^*c^*) = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$

**مهم:** برای خواص تصمیم‌پذیر (Decidable) برای زبان‌های مستقل از متن:

قضیه: الگوریتمی وجود دارد که می‌تواند تصمیم بگیرد آیا زبان یک گرامر مستقل از متن داده شده ($L(G)$) تهی هست یا نه. (زبان تهی یعنی هیچ رشته‌ای را تولید نکند)

اثبات: حذف قواعد Useless گرامر از هر دو جنبه و بررسی این که آیا $S$ باقی مانده است یا خیر.
پایه زایا نشده باشد — پیش نیاز آن start

قضیه: الگوریتمی وجود دارد که می‌تواند تصمیم بگیرد آیا زبان یک گرامر مستقل از متن داده شده ($L(G)$) نامتناهی هست یا نه. ۱) اول ساده می‌کنیم.

اثبات: گرامر را ساده می‌کنیم، اگر متغیر تکرار شونده‌ای باقی ماند، زبان نامتناهی است
(یعنی حلقه توش ماند)

فرض مهم ★: هر زبان مستقل از متن با الفبای تک نمادی منظم است.

" ∴ هر زبان تک نمادی که منظم نباشد مستقل از متن هم نیست
$(a^{n!})$

این فصل تمرین‌های مشکلی دارد حتماً حل کنید.

(" تمرین‌های فصل ۸ "

(۸-۱) ۴- ۷- ۸- ۱۰- ۱۱- ۱۴- ۱۶- ۱۸

a c — تشخیص Pola

هر کدام که مستقل از متن بود تعیین کنید قطعی است یا غیر قطعی

تمرین (۸-۲)

۴- ۶- ۸- ۹- ۱۰- ۱۱- ۱۲- ۱۳- ۱۴- ۱۵- ۱۶

۱۸- ۱۹- ۲۲

amitiisweb.com

Created with Microsoft Office OneNote 2007
One place for all your notes and information